

Problemas propuestos

15. Hallar el área limitada por las curvas y rectas que se indican:

- (a) $y = x^2, y = 0, x = 2, x = 5$
 (b) $y = x^2, y = 0, x = 1, x = 3$
 (c) $y = 4x - x^2, y = 0, x = 1, x = 3$
 (d) $x = 1 + y^2, x = 10$
 (e) $x = 3y^2 - 9, x = 0, y = 0, y = 1$
 (f) $x = y^2 + 4y, x = 0$
 (g) $y = 9 - x^2, y = x + 3$
 (h) $y = 2 - x^2, y = -x$
 (i) $y = x^2 - 4, y = 8 - 2x^2$
 (j) $y = x^4 - 4x^2, y = 4x^2$
 (k) La curva dada por $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$
 (l) La curva dada por $9ay^2 = x(3a - x)^2$
 (m) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 0, x = 2$
 (n) $y = e^{x/a} + e^{-x/a}, y = 0, x = \pm a$
 (o) $xy = 12, y = 0, x = 1, x = e^2$
 (p) $y = 1/(1 + x^2), y = 0, x = \pm 1$
 (q) $y = \tan x, x = 0, x = \frac{1}{4}\pi$
 (r) Un sector circular de radio r y ángulo α .
 (s) La elipse $x = a \cos t, y = b \sin t$.
 (t) $x = 2 \cos \theta - \cos 2\theta - 1, y = 2 \sin \theta - \sin 2\theta$.
 (u) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$.
 (v) Primer arco de $y = e^{-ax} \sin ax$.
 (w) $y = xe^{-x^2}, y = 0$, y la ordenada máxima.
 (x) Las dos ramas de $(2x - y)^2 = x^3$ y $x = 4$.
 (y) Dentro de $y = 25 - x^2, 256x = 3y^2, 16y = 9x^2$.

Soluciones: (a) 39 unidades de superficie, (b) 20, (c) 22/3, (d) 36, (e) 8, (f) 32/3, (g) 125/6, (h) 9/2, (i) 32, (j) $512\sqrt{2}/15$, (k) $2a^3/3$, (l) $8\sqrt{3}a^2/5$, (m) $(e^2 + 1/e^2 - 2)$, (n) $2a(e - 1/e)$, (o) 24, (p) $\frac{1}{2}\pi$, (q) $\frac{1}{2} \ln 2$, (r) $\frac{1}{2}r^2\alpha$, (s) πab , (t) 6π , (u) $3\pi a^2/8$, (v) $(1 + 1/e^2)/2a$, (w) $\frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{e})$, (x) 128/5, (y) 98/3 unidades de superficie.

La ordenada media de la curva $y = f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ viene dada por

$$\frac{\text{Area}}{\text{Base}} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

16. Hallar la ordenada de (a) una semicircunferencia, (b) la parábola $y = 4 - x^2$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$.

Sol. (a) $\pi r/4$, (b) $8/3$.

17. (a) Hallar la ordenada media de un arco de la cicloide $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ con respecto a x .

(b) Idem, con respecto a θ .

Sol. (a) $\frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3a}{2}$, (b) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(1 - \cos \theta) d\theta = a$

18. En la caída libre de un cuerpo, $s = \frac{1}{2}gt^2$ y $v = gt = \sqrt{2gs}$.

(a) Demostrar que el valor medio de v con respecto a t en el intervalo $0 \leq t \leq t_1$ es igual a la mitad de la velocidad final.

(b) Demostrar que el valor medio de v con respecto a s en el intervalo $0 \leq s \leq s_1$ es igual a dos tercios de la velocidad final.